СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ФУРЬЕ- И ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА И СИНТЕЗА СИГНАЛОВ

MODERN METHODS OF THE FOURIER- AND WAVELET-ANALYSIS AND SYNTHESIS OF SIGNALS

Дьяконов В.П. (V. Dyakonov), д.т.н., профессор СмолГУ

В настоящее время компьютерная математика [1] нашла реальное применение в ряде измерительных приборов и систем и, прежде всего, в цифровых осциллографах и анализаторах спектра [2-4]. В этой статье описаны современные методы Фурье- и вейвлет анализа сигналов [5, 6], исследуемых с помощью этих приборов и высказаны соображения о путях их развития.

Современные системы компьютерной математики (СКМ), цифровые осциллографы и анализаторы спектра представляют сигнал в виде ряда дискретных отсчетов y_0, y_1,…, y_{N-2}, y_{N-1}, обычно размещаемых через постоянные промежутки времени. Последовательность отсчетов или кадр фиксирована по длине и характеризуется числом отсчетов N. Таким образом, сигнал представляется в виде периодической последовательности $y_{k+N}=y_k$. При этом сигнал можно трактовать как последовательность масштабированных и смещенных во времени дельта-функций

$$s(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k\delta(t-k), \qquad (1)$$

которая может быть продолжена как вперед, так и назад.

Однако исторически сложилось так, что для представления периодических (и не только) сигналов чаще всего использовался тригонометрический ряд Фурье. Теоретически для кадра отсчетов сигнала он определяется выражением в экспоненциальной форме:

$$\dot{Y}_n=\frac{1}{NT}\sum_{k=0}^{N-1} s_k \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right). \qquad (2)$$

Здесь j — мнимая единица, n — номер гармоники, k — индекс отчетов сигнала (от 0 до N-1). Обычно выражение (2) нормируется путем задания периода T=1:

$$\dot{Y}_n=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} s_k \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right). \qquad (3)$$

Используя последнее выражение можно вычислить отсчеты амплитудно-частотной (АЧХ) и фазо-частотной (ФЧХ) характеристик дискретного сигнала конечной длины, т. е. его спектр. Это широко используется в современных цифровых анализаторах спектров и в осциллографах. При этом для ускорения спектрального анализа используется хорошо известное быстрое преобразование Фурье — БПФ.

При сигналах любого вида f(t) в общем случае реализуется прямое преобразование Фурье

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt. \qquad (4)$$

Здесь $f(t)$ — скалярная функция независимой переменной t. Спектр при этом становится сплошным.

Для $f(t)$ в виде синусоидальной или косинусоидальной функции (4) может быть найдено в замкнутой форме через функцию Дирака. Для синусоидального сигнала это $-Ai\delta(\omega-\omega_0)$, а для косинусоидального $Ai\delta(\omega-\omega_0)$. Здесь $\delta(\omega-\omega_0)$ — функция Дирака, равная 1 при $\omega-\omega_0$ (или $\omega=\omega_0$) и 0 во всех других случаях. Таким образом, спектр этих сигналов представляется вертикальной линией с высотой A и частотой ω_0. Учитывая, что преобразование Фурье имеет линейный характер, то для периодических сигналов, представленных набором гармоник, мы будем иметь хорошо известный линейный спектр.

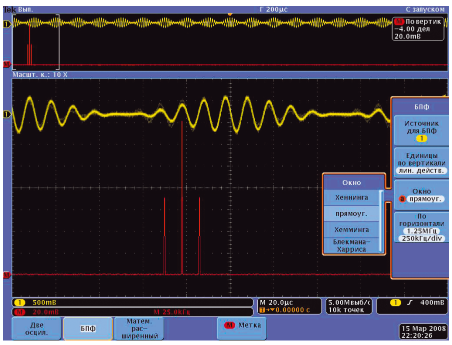

Рис. 1. Пример наблюдения спектра АМ-сигнала с применением временного и частотного окон с помощью осциллографа DPO4101

Увы, но преобразование (4) является теоретической абстракцией, даже если предположить, что сигнал был определен вплоть до текущего момента τ. В связи с этим было введено понятие текущего частотного спектра, у которого верхний предел в (4) заменяется значением τ в определенный момент времени:

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\tau} f(t)e^{-i\omega t}dt. \qquad (5)$$

Здесь мы перешли от функции F(ω) к функции S(ω), которая представляет спектральную плотность сигнала. Заметим, что часто анализаторы спектра выводят спектр мощности, т.е. величину $S^2(\omega)$, причем с частотой, которая задается в линейном или логарифмическом масштабе. Выражение (5) нетрудно представить в виде:

$$S(\omega)=|S(\omega)|\cdot e^{j\varphi(\omega)t}, \qquad (6)$$

где модуль спектральной плотности на частоте щ и аргумент (фаза):

$$|S(\omega)|=\sqrt{S^2(\omega)_{\sin}+S^2(\omega)_{\cos}},$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{S(\omega)_{\sin}}{S(\omega)_{\cos}}. \qquad (7)$$

Здесь синусная и косинусная составляющие спектральной плотности и фазы определяются выражениями:

$$S(\omega)_{\sin}=\int_{-\infty}^{\tau} f(t)\sin(\omega t)dt \text{ и}$$

$$S(\omega)_{\cos}=\int_{-\infty}^{\tau} f(t)\cos(\omega t)dt. \qquad (8)$$

Было доказано, что если спектр определен на конечном интервале времени T, то остаются справедливыми формулы, полученные из предположения периодичности сигнала. Следовательно, любой детерминированный сигнал, определенный на отрезке времени T его повторения можно разложить на конечное число гармоник. Разумеется, чем оно больше, тем выше точность спектрального анализа и последующего синтеза сигнала.

Обратное преобразование Фурье задается следующим образом:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega. \qquad (9)$$

Эта формула позволяет по функции F(ω) найти в аналитическом виде функцию $f(t)$. Таким образом, осуществляется синтез сигнала и его восстановление во временной области. Фурье-анализ и синтез десятилетиями лежали в основе радиотехники и связи.

На практике ряды Фурье с бесконечным числом членов неприменимы, поскольку при вычислениях требуют бесконечно большого времени. Поэтому приходится ограничиваться конечным числом членов ряда. К сожалению, при ограничении спектра конечным числом гармоник наблюдаются характерные волнообразные колебания синтезированных сигналов, особенно заметные в области разрывов. Этот эффект получил название эффекта Гиббса. Математически он является следствием плохого схождения тригонометрического ряда Фурье.

Эффект Гиббса особенно сильно проявляется в случае вырезания сигнала прямоугольным окном, когда конечный отсчет сигнала не совпадает с начальным отсчетом.

Для преодоления проблемы разрывов сигнала в начале и конце кадра отсчетов при прямом оконном преобразовании Фурье используются временные окна с плавным спадом по обе стороны от центра, например косинусоидальные:

$$W_i = \sum_{m=0}^{M-1} a_m \cos\left(\frac{2\pi i}{N} m\right), \qquad (10)$$

где $0 \le i \le N$. Здесь $M=3$ максимальное количество слагаемых, a_m — коэффициенты косинусных членов, i — текущий индекс.

Параметры ряда окон этого семейства даны в таблице 1.

Таблица 1
ПАРАМЕТРЫ НЕКОТОРЫХ ОКОН СЕМЕЙСТВА (10)

Тип окна	a0	a1	A
Прямоугольное	1	0	0
Хэннинга	0,5	-0,5	0
Хэмминга	0,54	-0,46	0
С плоской вершиной	0,281	-0,521	0,198
Блэкмана-Харриса	0,423	-0,497	0,079

Уровень ослабления боковых лепестков в спектре прямоугольного окна составляет всего –13 дБ. Для сравнения отметим, что у широко применяемых окон Хэмминга и Хэннинга он составляет –43 и –32 дБ. Недавно предложенное окно Блэкмана-Харриса имеет уникально низкий уровень боковых лепестков — их ослабление составляет –92 дБ. При использовании окон в частотной области они определяют вид пиков, отображающих гармоники при спектральном анализе периодических сигналов.

Описанные методы уже широко применяются на практике с современных цифровых осциллографах — как бюджетных, так и высшего класса, например в анализаторах сигналов реального времени. На рис. 1 показано применение цифрового осциллографа Tektronix DPO4104 закрытой архитектуры в качестве анализатора спектра амплитудно-модулированного сигнала. Средство Wave Inspector задает временное окно (рис. 5 сверху в белых квадратных скобках), задающее вырезку сигнала, а спектр (рис. 5 снизу) строится с применением частотного окна. Его можно выбрать из списка окон.

Цифровые осциллографы в роли анализаторов спектра легко справляются с построением спектров видеосигналов, например, импульсов. Однако их «ахиллесовой пятой» являются узкополосные сигналы, например, радиочастотные. Получение спектров, подобных показанному на рис. 5 спектру АМ-сигнала, скорее является исключением, чем правилом. Тут спектр близок теоретическому (три вертикальных отрезка с частотами несущего колебания и двух боковых частот) из-за умеренного значения несущей частоты и высокого значения модулирующей частоты — 100 и 10 кГц, соответственно. Разрешение спектрального анализа можно увеличить применяя память на большое число отсчетов.

Для анализа радиочастотных сигналов разработано множество анализаторов спектра радиочастот [3, 4]. Одними из лучших являются анализаторы спектра реального времени, выпускаемые фирмой Tektronix. В этих приборах анализируемая частотная область сигнала переносится в область промежуточной частоты (ПЧ) и аналого-цифровое преобразование выполняется в области ПЧ с помощью специально разработанного высокоскоростного АЦП и блока цифровой обработки сигнала ЦОС с блоком памяти. В полной мере реализованы и программные средства компьютерной математики, реализующие метод скользящего оконного преобразования, позволяющий строить спектрограммы в плоскости частота-время с отображением интенсивности частотных составляющих в виде цвета (рис. 2).

Стоит отметить принципиальные ограничения базисных функций синуса и косинуса рядов Фурье — они непрерывны, не способны принципиально описать скачки сигнала, определены в бесконечном времени как вперед, так и назад, дают медленно сходящиеся ряды и не позволяют корректно представлять нестационарные сигналы, параметры которых меняются во времени. К примеру, спектры сигнала,

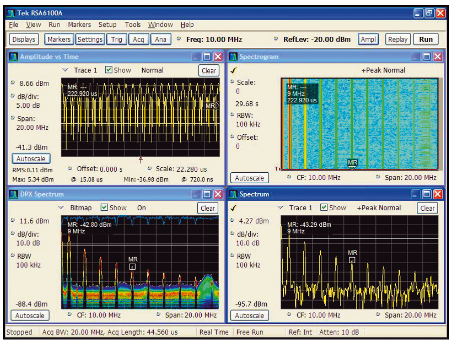

Рис. 2. Вид экрана цифрового анализатора спектра реального времени Tektronix RSA6100

являющегося наложением синусоид из нескольких частот и сигнала, представленного в виде временной последовательности из этих синусоид (без их наложения), выглядят одинаково, хотя это совсем разные сигналы. По спектру сигнала с особенностями нельзя определить положение особенностей во времени, хотя оконное преобразование Фурье частично эту задачу решает — с разрешением в пределах размера временного окна. Но, в пределах окна все принципиальные недостатки Фурье-преобразований сохраняют свою силу.

В связи с этим в последние два десятилетия возникала и развивается новая область представления произвольных сигналов с помощью вейвлетов — коротких «волночек», или «всплесков», масштабируемых и перемещаемых по оси времени [2]:

$$s(t) = \sum_k C_k(a,b)\psi_k(t,a,b), \qquad (11)$$

где параметр a задает ширину вейвлета, a b — его положение. Их набор позволяет осуществить вейвлет-синтез сигналов, как идеально точный, так и приближенный. В последнем случае осуществляет вейвлет-фильтрация сигнала и его сжатие.

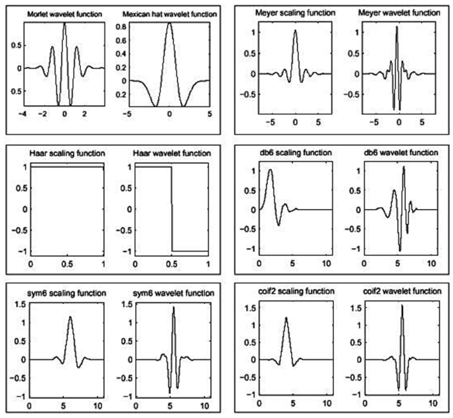

Рис. 3. Некоторые типы вейвлетов

В основе вейвлет-преобразования лежит использование двух непрерывных и интегрируемых по всей оси t (или x) функций:

- вейвлет-функция psi $\psi(t)$ с

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0,$$

- масштабирующая или скейлинг-функция $\varphi(t)$ с

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt = 1.$$

Phi-функции, задающие грубое приближение (аппроксимацию) сигнала, присущи только ортогональным вейвлетам. А детализирующие psi-функции создаются на основе той или иной базисной функции $\psi_0(t)$, которая и определяет тип вейвлета. Psi-функция должна иметь свойства смещения во времени и масштабирования:

$$\psi(t,a,b) \equiv \psi(a,b,t) = a^{-1/2}\psi_0\left(\frac{t-b}{a}\right). \qquad (12)$$

В настоящее время известны многие типы вейвлетов. Лишь один из них — мексиканска шляпа имеет аналитическое представление для детализирующей и аппроксимирующей функции. Большинство же вейвлетов задается итерационными выражениями, причем числи итераций определяет порядок вейвлета. Самыми известными являются ортогональные вейвлеты Добеши, вейвлеты Мейера, Хаара и др. (рис. 3).

Прямое непрерывное вейвлет-преобразование сигнала s(t) задается вычислением вейвлет-коэффициентов по формуле:

$$C(a,b)=\langle s(t),\psi(a,b,t)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)a^{-1/2}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt\,.\quad(13)$$

С учетом обычно ограниченной области определения сигналов и $a,b\in R$, $a\neq 0$ (24) можно представить в виде:

$$C(a,b)=\int_R s(t)a^{-1/2}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt\,.\quad(14)$$

Обратное непрерывное вейвлет-преобразование осуществляется по формуле реконструкции во временной области:

$$f=C_\psi^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dadb}{a^2}\langle f,\psi^{a,b}\rangle\psi^{a,b},\quad(15)$$

В пакете расширения СКМ MATLAB — Wavelet Toolbox используется следующая формула реконструкции сигнала:

$$s(t)=\frac{1}{K_\psi}\int_{R^+}\int_R C(a,b)a^{-1/2}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\frac{dadb}{a^2},\quad(16)$$

где $K\psi$ — константа, определяемая функций ψ.

Если a и b задавать дискретно, что обычно и делается, то можно реализовать дискретное кратномасштабное вейвлет-преобразование. Чаще всего кратность берется равной 2^L, что соответствует диадическому вейвлет-преобразованию, где целое L есть уровень преобразования, задающий разрешение. Доказано, что вейвлет-коэффициенты при таком преобразовании подобны коэффициентам НЧ и ВЧ фильтров. Поэтому широко распространены вейвлет-преобразования, построенные на основе применения частотных фильтров.

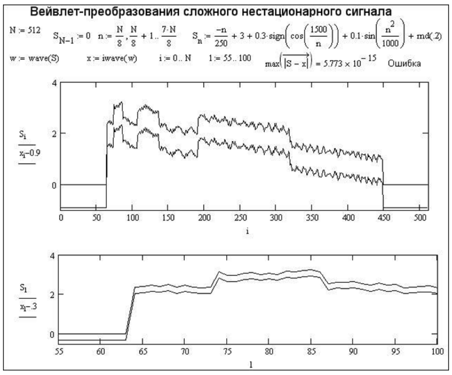

Рис. 4. Пример вейвлет-разложения и реконструкции сложного сигнала

Средства вейвлет-преобразований пока не используются в серийных цифровых осциллографов и анализаторах спектров. Но они уже представлены в ряде пакетов расширений по вейвлетам СКМ Mathcad, Mathematica и MATLAB. При установке этих систем в приборы открытой архитектуры эти средства уже можно полноценно использовать в практике исследований и измерений. Это возможно также при стыковке измерительных приборов с закрытой архитектурой с ПК, на которых установлены СКМ.

Вейвлет-преобразования наиболее эффективны при решении следующих наиболее типовых задач:

- построение вейвлет-спектрограмм и анализ тонких особенностей сигналов;
- фильтрация сигнала путем ограничения числа используемых вейвлет-коэффициентов;
- очистка и сглаживание сигналов (в том числе нестационарных) и изображений от шума и помех;
- компрессия (сжатие) сигналов с малыми их искажениями;
- интерполяция, экстраполяция и аппроксимация сигналов;

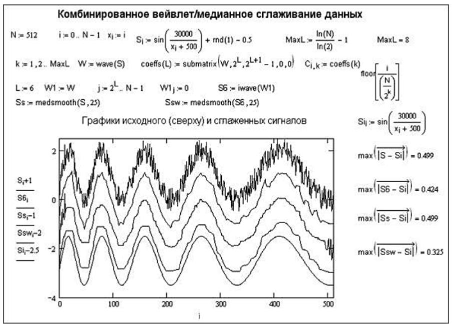

Рис. 5. Пример комбинированного вейвлет-медианного сглаживания и очистки сигнала от шума

Элементарную технику вейвлет-преобразований демонстрирует рис. 4. Здесь моделируется сложный сигнал с шумом — верхний график первого рисунка. С помощью встроенной в ядро Mathcad функции прямого вейвлет-преобразования wave этот сигнал превращается в набор вейвлет-коэффициентов. После этого функция обратного преобразования iwave восстанавливает сигнал с исчезающе малой ошибкой около $5{,}8\cdot10^{-15}$. В результате график восстановленного сигнала (нижний) невозможно отличить от исходного. На нижнем рисунке это же показано для уменьшенного фрагмента сигнала.

Пример комбинированного вейвлет-медианного сглаживания нестационарного сигнала показан на рис. 5. Степень сглаживания определяется уровнем L.

Вейвлет-спектрограмма строится в плоскости время (или номер дискретного отсчета) — номера вейвлет-коэффициентов, а уровень вейвлет-коэффициентов задается яркостью (цветом). Это делает вейвлет-спектрограммы похожими на спектрограммы анализаторов спектра реального времени. Особенно детальными получаются вейвлет-спектрограммы при непрерывном прямом вейвлет-преобразовании. Пример такой спектрограммы показан на рис. 6 (получена в СКМ MATLAB). Спектрограмма показана под графиком нестационарного сигнала, содержащего последовательность из двух синусоид разной частоты. Она четко распознает обе частоты и отрезки времен их существования.

Пакет расширения Wavelet Toolbox системы MATLAB является одним из самых мощных средств для работы с вейвлетами. Эта работа возможна как с помощью окон графического интерфейса пользователя GUI (пример рис. 6), так и из окна командного режима. Будучи установленный (вместе с базовой системой MATLAB) пакет может использоваться для обработки осциллограмм и спектров от современных цифровых измерительных приборов, расширяя области их применения.

Возможность вейвлет-спектрограмм в обнаружении локальных особенностей сигналов поразительна. При Фурье-анализе чем короче особенность сигнала, тем хуже она обнаруживается. Это связано с тем, что короткие особенности дают широкий и расплывчатый спектр, который размазывается по всей частотной оси и маскируется спектром шумов. При вейвлет спектральном анализе все происходит совсем иначе — чем короче особенность и чем выше ее изменение во времени, тем ярче она выделяется на спектрограмме. Происходит своеобразная адаптация вейвлет-анализа к неоднородностям сигналов. Это видно из рис. 6, но мы приведем еще более наглядные примеры.

Ниже представлена небольшая программа на языке MATLAB, которая моделирует нестационарный сигнал в виде синусоиды, на которую наложен меандр с переменной частотой:

```
t = linspace(-6,6,2048);
s = sin(t)+0.1.*sign(sin((t-7).^2./3));
subplot(2,1,1)
plot(t,s); title(' function s(t)')
subplot(2,1,2)
c = cwt(s,1:2:256,'sym4','abslvl',[100 400]);
title('wavelet spectr')
```

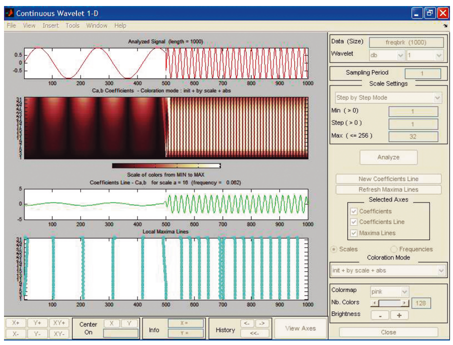

Рис. 6. Вейвлет-спектрограмма двухчастотого сигнала полученная в окне GUI системы MATLAB

Затем программа строит график сигнала и проводит непрерывное вейвлет-преобразование с помощью функции cwt с построением спектрограммы (рис. 7). Хотя амплитуда меандра составляет всего 0,1 от амплитуды синусоиды, спектрограмма отчетливо выявляет меандр и четко фиксирует как его особенности (перепады), так и особенности синусоиды (экстремумы и переходы через 0).

А теперь исполним «смертельный номер» — уменьшим амплитуду меандра до 0,001 от амплитуды синусоиды. Для этого множитель 0,1 во второй строке приведенной программы изменим на 0,001. Запустив программу снова, получим результат, представленный на рис. 8. Нетрудно заметить, что на уровне вейвлет-коэффициентов с малыми номерами наличие меандра выявляется очень четко, хотя на временной зависимости нет даже малейшего намека на эту малую составляющую сигнала. Надо ли говорить, что такая особенность вейвлет-анализа и построения

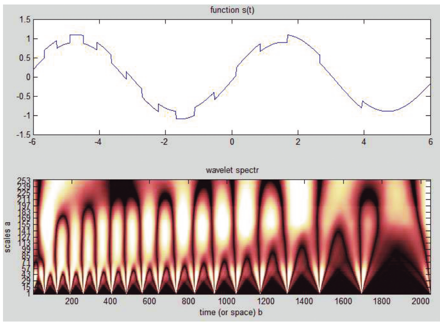

Рис. 7. Построение вейвлет-спектрограммы синусоиды с наложенным на нее меандром с переменной частотой и амлитудой, равной 0,1 от амплитуды синусоиды

вейвлет-спектра открывает широчайшие возможности в детальном анализе различных сигналов, выявлении помех и следов переходных процессов в электрических сетях, анализе импульсных процессов в эфире и т.д.

С помощью пакета расширения Simulink в MATLAB возможно блочное имитационное моделирование устройств и систем, в том числе реализующих вейвлет-технологии обработки сигналов. Пример этого представлен на рис. 9.

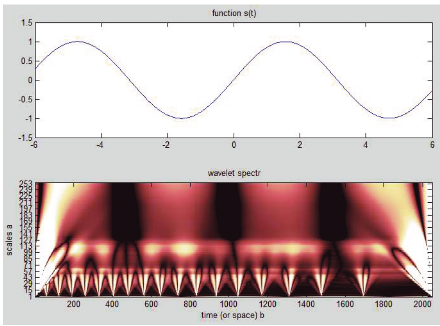

Рис. 8. Построение вейвлет-спектрограммы синусоиды с наложенным на нее меандром с переменной частотой и амплитудой, равной 0,001 от амплитуды синусоиды

В этом примере смоделировано устройство, обеспечивающее на основе кратномасштабного вейвлет-преобразования вначале анализ, а затем синтез сложного нестационарного сигнала в виде зашумленной синусоиды с изменяемой во времени амплитудой и частотой. Фильтрация сигнала обеспечивается адаптивным ограничением числа вевлет-коэффициентов. Таким же образом осуществляется сжатие сигналов и изображений.

С помощью вейвлет-преобразований можно не только очищать сигналы от шумов и помех, но и выделять последние. Нередко возможна ситуация,

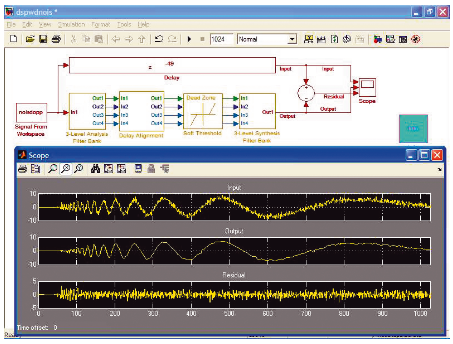

Рис. 9. Модель устройства для очистки от шума сложного нестационарного сигнала

когда именно малые шумоподобные сигналы, замаскированные большими сигналами, представляют интерес для исследования и применения. Такая ситуация встречается, к примеру, в случае использования промышленной сети переменного тока для передачи информационных и измерительных сигналов.

Завершая статью можно отметить, что техника вейвлет-преобразований находится в начальной стадии ее внедрения в измерительную технику. Но близится время, когда появятся серийные вейвлет-осциллографы, вейвлет-спектрометры и другие приборы на основе вейвлет-преобразований. А пока вейвлет-обработка сигналов вполне возможна при стыковке серийных цифровых приборов с компьютерами, на которые установлены системы компьютерной матемтики с пакетами расширения по вейвлетам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дьяконов В. П. Компьютерная математика. Теория и практика. М.: Нолидж, 2001, с. 1396.
2. Афонский А. А., Дьяконов В. П. Измерительные приборы и массовые электронные измерения. М.: СОЛОН-Пресс, 2007, с. 544.
3. Афонский А. А., Дьяконов В. П. Цифровые анализаторы спектра, сигналов и логики. М.: СОЛОН-Пресс, 2004, с. 249.
4. Афонский А. А. Новые анализаторы спектра реального времени среднего уровня позволяют отображать РЧ сигналы в реальном времени. Контрольно-измерительные приборы и системы, № 2 апрель, 2008, с. 19.
5. Дьяконов В. П. Вейвлеты. От теории к практике. Изд-е 2-ое переработанное и дополненное. М.: СОЛОН-Пресс, 2004, с. 400.
6. Дьяконов В. П. MATLAB 6.5 SP1/7.0 + Simulink 5/6. Обработка сигналов и проектирование фильтров. М.: СОЛОН-Пресс, 2005, с. 576.

Modern methods of the Fourier- and wavelet-analysis of signals researched with the help of digital oscilloscopes and spectrum analyzers are described in this article and reasons about ways of their development are stated.